Über Sätze von Stone und Bochner.

Von FRIEDRICH RIESZ in Szeged.

Einleitung.

Es sei U_t, $-\infty < t < \infty$, eine lineare Gruppe unitärer Transformationen des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$, d. h. es sei

$$(U_t f, U_t f) = (f, f), \quad U_s U_t = U_{s+t}, \quad U_0 = E,$$

wo das Symbol (f, g) das innere Produkt der Elemente f, g und E die Identität bedeuten. Die Gruppe sei ferner stetig in dem Sinne, daß das innere Produkt $(U_t f, g)$ für beliebige f und g eine stetige Funktion von t darstelle.

Über solche Gruppen hat M. H. STONE den wichtigen Satz aufgestellt, daß *die Gruppe U_t die Spektraldarstellung*

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda$$

oder in bilinearer Schreibweise

$$(1) \qquad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d(E_\lambda f, g)$$

zuläßt. Hier bezeichnet E_λ, $-\infty < \lambda < \infty$, eine sogenannte Spektralschar, auch Zerlegung der Einheit genannt, d. i. eine Schar von beschränkten, selbstadjungierten, linearen Transformationen von $\mathfrak{H}$, für welche *a)* $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ für $\lambda \leqq \mu$, also speziell $E_\lambda^2 = E_\lambda$; *b)* $(E_\lambda f, g) \to 0$ bzw. (f, g) für $\lambda \to -\infty$ bzw. $+\infty$ und *c)* Linksstetigkeit d. i. $(E_\lambda f, g) \to (E_\mu f, g)$ für $\lambda < \mu$, $\lambda \to \mu$ gilt.[1])

---

[1]) M. H. STONE, Linear transformations in Hilbert space, III, *Proceedings Nat. Acad.*, **16** (1930), S. 172—175.

Das durch den Stoneschen Satz erledigte Problem zeigt eine unverkennbare Analogie mit jenem Ansatz, auf den ich seinerzeit meinen Beweis für die Hilbertsche Spektraldarstellung der beschränkten quadratischen Formen unendlich vieler Veränderlichen und ihrer Resolvente gründete.[2]) In der hier benützten Schreibweise handelte es sich dort darum, eine der Natur des Problems gemäß außerhalb eines gewissen Intervalles (m, M) konstante Spektralschar E_λ so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$A^n = \int_m^M \lambda^n dE_\lambda \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und also speziell die Gleichungen

$$(A^n f, f) = \int_m^M \lambda^n d(E_\lambda f, f) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

bestehen, wo A die durch die quadratische Form bestimmte Transformation und A^n die entsprechenden Potenzen von A bedeuten. Zufolge der geforderten Monotonität von $(E_\lambda f, f)$ als Funktion von λ war hiemit das Problem der Spektraldarstellung auf das Stieltjessche Momentenproblem für ein endliches Intervall zurückgeführt. An Stelle des Gleichungsystems (2) tritt nun bei dem Stoneschen Problem die Gleichung (oder genauer die kontinuierliche Schar von Gleichungen)

$$(U_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d(E_\lambda f, f) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{3}$$

die sich aus der Forderung (1) durch Gleichsetzen von f und g ergibt. Für fest gegebenes f ist diese Gleichung von der Form

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\, V(\lambda), \tag{4}$$

wo $p(t)$ für $-\infty < t < \infty$ gegeben und $V(\lambda)$ als für $-\infty < \lambda < +\infty$ reelle, beschränkte und nirgends abnehmende Funktion zu bestimmen ist. Es handelt sich hier also um die Frage, wann eine gegebene Funktion $p(t)$ die Fourier—Stieltjessche Integraldarstellung (4) mit beschränkter und nirgends abnehmender Verteilungsfunktion $V(\lambda)$ oder anders ausgedrückt mit einer nichtnegativen Massenverteilung dV von endlicher Gesamtmasse zuläßt. Dieses

[2]) F. Riesz, Über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen,* 1910, S. 190—195.

Momentenproblem, das in der Theorie der Fourierschen Integrale das Gegenstück zu einem für Fouriersche Reihen wohlbekannten, vor mehr als 20 Jahren gelösten Problem bedeutet,[3]) wurde merkwürdigerweise erst vor kurzem durch S. BOCHNER erledigt.[4]) *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $p(t)$ die Darstellung (4) zulasse, besteht darin, daß die Funktion $p(t)$ positiv-definit sei d. i. erstens für alle endliche t stetig sei und zweitens die Eigenschaft habe, daß für irgendwelche Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ und irgendwelche Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$*

$$(5) \qquad \sum_{\mu,\, \nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\, \varrho_\mu \overline{\varrho_\nu} \geqq 0$$

ausfällt. Fügen wir noch hinzu, daß sobald diese Bedingungen für $p(t)$ erfüllt sind, die gesuchte Vorteilungsfunktion $V(t)$ durch die Forderung der Linksstetigkeit und von $V(-\infty) = 0$ eindeutig festgelegt ist.

Aus den soeben angeführten Tatsachen ergibt sich der Stonesche Satz durch einen ähnlichen Gedankengang wie die Hilbertsche Spektraldarstellung aus dem Momentenproblem. Ich hatte ursprünglich die Absicht, dies in allen Einzelnheiten auseinanderzulegen. Während der Schriftlegung der vorliegenden Note erhielt ich jedoch von Herrn BOCHNER die Korrekturbogen einer der Preußischen Akademie vorgelegten Arbeit,[5]) in der er einen ähn-

---

[3]) Wir denken hier an den folgenden Satz: *Damit das Gleichungssystem*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda} d\alpha(\lambda) = a_k \qquad (k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

eine monoton wachsende und beschränkte Lösung $\alpha(\lambda)$ zulasse, ist notwendig und hinreichend, daß $a_{-k} = \overline{a_k}$ und daß die Formen

$$\sum_{j,\, k=1}^{n} a_{j-k}\, x_j \overline{x_k} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

positiv-definit sind. Der Satz ergibt sich durch triviale Verknüpfung der klassischen Sätze von CARATHÉODORY und TOEPLITZ über Potenzreihen mit positivem Realteil mit einem Satze des Verfassers, welcher den Zusammenhang zwischen jenen Reihen und den monotonen Funktionen feststellt. Vgl., auch wegen der übrigen Zitate, C. CARATHÉODORY, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rendiconti Circ. Mat. Palermo,* 32 (1911), S. 193—217.

[4]) S. BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale,* Leipzig 1932, S. 74—76.

[5]) S. BOCHNER, Spektralzerlegung linearer Scharen unitärer Operatoren, unter Druck in den *Sitzungsberichten Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse,* 1933.

lichen Beweis mitteilt. So darf ich mich nun hier auf eine skizzenhafte Darstellung beschränken und mich hauptsächlich einer zweiten Frage zuwenden. Diese Frage hängt damit zusammen, daß der Stonesche Satz, wie dies zuerst durch J. v. NEUMANN bemerkt wurde, auch dann gültig bleibt, wenn man die an $(U_t f, g)$ als Funktion von t gestellte Stetigkeitsforderung durch die schwächere Forderung der *Meßbarkeit* ersetzt. Beide bisher veröffentlichten Beweise[6]) gelten unter dieser schwächeren Bedingung. Dies ist nun auch für den hier skizzierten Beweis der Fall. Ich werde nämlich zeigen, daß in dem Bochnerschen Satze selbst die Forderung der Stetigkeit durch jene der Meßbarkeit ersetzt werden kann, indem nämlich die Stetigkeit von $p(t)$ aus der Meßbarkeit und aus der Voraussetzung (5) folgt, bis auf einen kleinen Schönheitsfehler.[7]) *Genauer gesagt folgt aus diesen Voraussetzungen die Existenz einer stetigen Funktion $p^*(t)$ von positiv definitem Typus und somit von der Form* (4), *die fast überall mit der vorgegebenen Funktion $p(t)$ übereinstimmt.* Bei Anwendung auf das Stonesche Problem wird dieser Schönheitsfehler durch die Gruppeneigenschaft eliminiert.

Erweiterung des Bochnerschen Satzes.

Um Wiederholungen zu vermeiden, beginne ich mit der Ausdehnung des Bochnerschen Satzes. Es sei also $p(t)$, $-\infty < t < \infty$, eine meßbare Funktion von positivem Typus, d. i. eine reelle oder komplexwertige meßbare Funktion, die für beliebige Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_m$ und beliebige komplexe Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ die Ungleichung (5) erfüllt. Stetigkeit von $p(t)$ wird nicht vorausgesetzt und wird, falls vorhanden, besonders betont.

Die Ungleichung (5) besagt, daß der linksstehende Ausdruck eine nichtnegative Hermitesche Form darstellt. Somit ist

$$p(t_2-t_1)=\overline{p}(t_1-t_2).$$

---

[6]) J. VON NEUMANN, Über einen Satz von M. H. Stone, *Annals of Math.*, **33** (1932), S. 567—573; M. H. STONE, On one-parameter unitary groups in Hilbert space, *ebenda*, S. 643—648.

[7]) Daß dieser Schönheitsfehler wirklich vorkommt, zeigt das folgende einfache Beispiel. Es sei $\mathfrak{M}$ irgendeine Nullmenge, die mit s und t zugleich auch $ms+nt$ enthält $(m, n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$. Die Funktion, die auf $\mathfrak{M}$ überall gleich 1, sonst gleich 0 ist, ist eine *unstetige* Funktion vom gewünschten Typus.

Setzt man speziell $t_1 = \frac{t}{2}$, $t_2 = -\frac{t}{2}$, so erhält man, daß allgemein

(6) $$p(-t) = \bar{p}(t).$$

Setzt man außerdem $m=1$ und $m=2$ und beachtet man, daß die Determinante der entsprechenden Form reell und nichtnegativ sein muß, so ergibt sich, daß

$$p(0) \geqq 0, \quad |p(t)| \leqq p(0)$$

für alle Werte von t. Die Funktion $p(t)$ ist somit beschränkt.

Besonders wichtig für alles weitere ist die der Ungleichung (5) analoge Integralungleichung

(7) $$\iint_{-A}^{A} p(t-s)\, \varrho(t)\, \bar{\varrho}(s)\, ds\, dt \geqq 0,$$

wo $\varrho(s)$ eine beliebige im Intervall $(-A, A)$ quadratisch integrierbare Funktion bedeutet. Im Falle stetiger oder nach RIEMANN integrierbarer Funktionen p und ϱ folgt diese Ungleichung aus (5) durch evidenten Grenzübergang.[8] Im allgemeinen Falle schließen wir wie folgt. In der Ungleichung (5) setzen wir an Stelle von ϱ_μ, $\bar{\varrho}_\nu$ die Funktionen $\varrho(t_\mu)$, $\bar{\varrho}(t_\nu)$ der unabhängigen Variabeln t_μ, t_ν und integrieren m-fach von $-A$ bis A. Die diagonalen Glieder $(\mu = \nu)$ ergeben je

$$(2A)^{m-1} p(0) \int_{-A}^{A} |\varrho(t)|^2\, dt,$$

die übrigen je

$$(2A)^{m-2} \iint_{-A}^{A} p(t-s)\, \varrho(t)\, \bar{\varrho}(s)\, ds\, dt;$$

somit erhält man, daß

$$m\,(2A)^{m-1} p(0) \int_{-A}^{A} |\varrho(t)|^2\, dt + \\ + m\,(m-1)\,(2A)^{m-2} \iint_{-A}^{A} p(t-s)\, \varrho(t)\, \bar{\varrho}(s)\, ds\, dt \geqq 0$$

Division durch den vor dem zweiten Integralausdruck stehenden Faktor und der Grenzübergang $m \to \infty$ ergeben dann die zu be-

[8]) Vgl. BOCHNER, a. a. O. [4]).

weisende Ungleichung. Schließlich kann die quadratische Integrierbarkeit von $\varrho(s)$ durch gewöhnliche Integrierbarkeit ersetzt werden, indem man nämlich $|\varrho(t)|$ in der Höhe n abschneidet, d. h. an allen Stellen t, wo $|\varrho(t)| > n$, $\varrho(t)$ durch $n\varrho(t)/|\varrho(t)|$ ersetzt, die Ungleichung (7) auf die abgeschnittene Funktion anwendet und dann n ins Unendliche wachsen läßt. Ferner erhält man für $A \to \infty$ die Ungleichung

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} p(t-s)\,\varrho(t)\,\bar{\varrho}(s)\,ds\,dt \geqq 0, \tag{8}$$

gültig für jede integrierbare d. h. absolut integrierbare Funktion $\varrho(t)$. Nebenbei bemerkt, werden wir die Ungleichung (8) nur auf gewisse spezielle stetige Funktionen $\varrho(t)$ anzuwenden haben; die Verallgemeinerung benötigen wir nur zufolge des allgemeinen Ansatzes betreffs $p(t)$.

Von hier angefangen könnten wir im großen und ganzen die Bochnersche Schlußweise wiederholen. Wir ziehen es vor, den Weg zur gesuchten Funktion $V(\lambda)$ durch jene positive lineare Operation hindurch zu leiten, deren erzeugende Funktion sie ist, die also schließlich für eine geeignete Funktionenklasse $\{h(\lambda)\}$ durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,d\,V(\lambda) \tag{9}$$

dargestellt wird.

Sei zunächst $h(\lambda)$ eine reelle, stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion, die außerhalb eines Intervalls überall verschwindet.[9] Ihre Fouriersche Transformierte

$$h^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda$$

ist bekanntlich stetig und integrierbar. Die Fouriersche Transformierte von $h^*(t)$ ist $h(-\lambda)$, jene von $h^*(-t)$ ist $h(\lambda)$ selbst. Wir erklären nun die Funktionaloperation $A(h)$ durch das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,h^*(-t)\,dt, \tag{10}$$

[9]) Man könnte sich ebenso gut auf stückweise zweimal stetig differenzierbare oder auch auf stückweise analytische Funktionen beschränken. Dagegen erweist sich der naheliegende Gedanke, mit stückweise linearen oder mit Treppenfunktionen zu arbeiten, in der Ausführung als schwerfällig.

das zufolge der Meßbarkeit und Beschränktheit von p und der Integrierbarkeit von h^* sicher vorhanden ist. Damit ist also für die Klasse der betrachteten Funktionen h eine distributive Operation A definiert.

Wir zeigen, daß die Operation A reell, positiv und beschränkt ist. Dies soll bedeuten, daß

1. für nichtnegative Funktionen $h(\lambda)$ der Wert von $A(h)$ reell und nichtnegativ ausfällt und daß

2. für alle $h(\lambda)$ der Wert $A(h)$ reell ist und sobald $|h(\lambda)|<1$, der Betrag von $A(h)$ unterhalb einer (von h unabhängigen) Schranke verbleibt.

Betrachten wir zunächst die Funktionen vom Typus $h^2(\lambda)$: Sie gehören ebenfalls zur betrachteten Funktionenklasse und ihre Fouriersche Transformierte ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, h^*(-s)\, e^{i\lambda s} e^{i\lambda t} d\lambda\, ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h^*(s+t)\, h^*(-s)\, ds\,;$$

also ergibt der Ausdruck (10), indem man h durch h^2, also h^* durch den soeben erhaltenen Ausdruck ersetzt,

$$A(h^2) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} p(t)\, h^*(s+t)\, h^*(-s)\, ds\, dt.$$

Ersetzt man noch t durch $t-s$ und bemerkt man, daß zufolge der Realität von $h(\lambda)$ die Gleichung

$$h^*(-s) = \overline{h^*}(s)$$

besteht, so wird

$$A(h^2) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} p(t-s)\, h^*(t)\, \overline{h^*}(s)\, ds\, dt,$$

also wird wegen (8)

$$A(h^2) \geq 0.$$

Nun sei $h_1(\lambda)$ eine beliebige reelle, nichtnegative Funktion der betrachteten Klasse, sie verschwinde außerhalb des Intervalls

(a, b) und es sei

$$h_2(\lambda) = (\lambda - a + 1)^2 (\lambda - b - 1)^2$$

für $a - 1 \leqq \lambda \leqq b + 1$, sonst gleich 0. Die positive Quadratwurzel der Funktion $h_1 + \varepsilon h_2$, wo $\varepsilon > 0$, sonst beliebig ist, gehört zu unserer Klasse, wie auch h_2 selbst; daher ist

$$A(h_1) + \varepsilon A(h_2) = A(h_1 + \varepsilon h_2) \geqq 0,$$

woraus für $\varepsilon \to 0$ auch

$$A(h_1) \geqq 0$$

folgt.

Damit ist die Behauptung 1. bewiesen. Um 2. zu beweisen, benutzen wir als Hilfsfunktion die Funktion

$$(11) \qquad \begin{aligned} h_3(\lambda) &= 1 - \frac{|\lambda|}{2} && \text{für } |\lambda| \leqq 2, \\ &= 0 && \text{für } |\lambda| > 2. \end{aligned}$$

Sie gehört zur betrachteten Klasse und ihre Fouriersche Transformierte ist

$$l(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

Ist nun $|h(\lambda)| < 1$, so ist für genügend großes n überall auch

$$|h(\lambda)| < h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right),$$

so daß also

$$h(\lambda) = h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \left[h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right) - h(\lambda)\right]$$

eine Darstellung von $h(\lambda)$ als Differenz zweier nichtnegativer Funktionen aus unserer Klasse ist. Daher ist auch $A(h)$ reell. Ferner folgt aus der Positivität von $h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right) \pm h(\lambda)$, daß

$$|A(h)| \leqq A\left(h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, l(-nt)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\frac{t}{n}\right) l(t)\, dt$$

ausfällt. Wegen $|p(t)| \leqq p(0)$ liegt aber der Wert des letzten Integrals unterhalb

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} p(0) \int_{-\infty}^{\infty} l(t)\, dt = p(0)\, h_3(0) = p(0).$$

Damit ist auch die Behauptung 2. bewiesen.

Bekanntlich gibt es zur distributiven positiven und beschränkten Funktionaloperation $A(h)$ eine beschränkte und monoton wachsende Funktion $V(\lambda)$ derart, daß die Operation $A(h)$ durch das Stieltjessche Integral (9) dargestellt wird. Die Funktion $V(\lambda)$ ist an allen Stetigkeitsstellen bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt; über die Konstante kann man so verfügen, daß der Grenzwert $V(-\infty)$ verschwinde. An den Sprungstellen kann man den Wert $V(\lambda)$ zwischen $V(\lambda-0)$ und $V(\lambda+0)$ beliebig verschieben, ohne den Wert des Integrals (9) zu beeinflußen; wir können z. B. so verfügen, daß $V(\lambda) = V(\lambda-0)$, d. i. die Funktion $V(\lambda)$ überall linksstetig werde. Die Differenz $V(\lambda_2-0) - V(\lambda_1+0)$, wo $\lambda_1 < \lambda_2$, also der auf das offene Intervall (λ_1, λ_2) entfallende Teil der Belegung, ist nichts anderes als die obere Schranke der Werte $A(h)$, wenn man zur Konkurrenz sämtliche, außerhalb des Intervalles verschwindende, sonst zwischen 0 und 1 gelegene Funktionen h der betrachteten Klasse zuläßt. Man erhält denselben Wert auch als Grenzwert von $A(h_n)$, wenn h_n eine wachsende Folge von Funktionen der soeben geschilderten Art durchläuft und für $n \to \infty$ im Intervall (λ_1, λ_2) gegen 1 konvergiert. In ähnlicher Weise ergibt sich die Differenz $V(\lambda_2+0) - V(\lambda_1-0)$ als untere Schranke von $A(h)$ für alle nichtnegative Funktionen h, die im Intervall (λ_1, λ_2) überall $\geqq 1$ sind, wie auch als Grenzwert von $A(h_n)$ für abnehmende Folgen h_n, die im abgeschlossenen Intervall gegen 1, sonst gegen 0 gehen. Speziell erhält man den Wert des Sprunges $V(\lambda+0) - V(\lambda-0)$, indem man $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ setzt.

Das über die Berechnung von $V(\lambda_2-0) - V(\lambda_1+0)$ Gesagte gilt sinngemäss auch für $\lambda_1 = -\infty$.

Das soeben Gesagte dient nur dazu, um bei dem Beweise des Stoneschen Satzes gewisse formale Überlegungen zu ersparen. Wir könnten auch mit der bloßen Existenz von $V(\lambda)$ auskommen.

Wir betrachten nun die durch das Integral

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dV(\lambda) \tag{12}$$

definierte Funktion $q(t)$, die zufolge der absoluten Konvergenz des

Integrals sicher beschränkt und stetig ist. Wir wollen zeigen, daß $q(t)$ fast überall mit der gegebenen Funktion $p(t)$ übereinstimmt. Wir verwenden hiefür die Identität

$$(13) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\, h^*(-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, h^*(-t)\, dt,$$

gültig für die Fouriersche Transformierten $h^*(t)$ von Funktionen $h(t)$ der betrachteten Klasse. Man erhält (13) durch Einsetzen des Ausdrucks (12) für $q(t)$ in das linksstehende Integral und Ausführung der Integration in bezug auf t, wodurch das Integral in

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, d\, V(\lambda) = \sqrt{2\pi}\, A(h),$$

also der Definition von $A(h)$ gemäß in das rechtstehende Integral übergeht.

Die Formel (13) bleibt auch für komplexwertige Funktionen von der Form $h = h_4 + i h_5$ bestehen, wo h_4 und h_5 beliebige Funktionen aus der betrachteten Klasse sind; dies folgt unmittelbar aus $h^* = h_4^* + i h_5^*$. Wir wenden sie speziell auf die Funktion

$$h(\lambda) = e^{i\lambda u} h_3\left(\frac{2\lambda}{n}\right)$$

an, wo $h_3(\lambda)$ die in (11) erklärte Funktion und u einen reellen Parameter bezeichnen. Evidente Rechnung ergibt

$$h^*(t) = \frac{n}{2}\, l\left(\frac{n}{2}(t+u)\right),$$

wo $l(t)$ die Fouriersche Transformierte von $h_3(\lambda)$ bezeichnet, also ist

$$h^*(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2}{n}\, \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t+u)}{(t+u)^2}.$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (13) wird

$$(14) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\, \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-u)}{n\,(t-u)^2}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-u)}{n\,(t-u)^2}\, dt.$$

Nun aber konvergieren die beiden Ausdrücke für $n \to \infty$ gegen $\pi/2\, q(u)$ bwz. $\pi/2\, p(u)$, der erste überall, der zweite fast überall. Dies folgt z. B. indem man zunächst durch eine evidente Abschätzung der Integranden für $|t-u| > \delta$ zeigt, daß das Verhalten für $n \to \infty$ nur von der Wertverteilung der Funktionen p, q in der

Umgebung der Stelle u abhängt, so daß also speziell das Verhalten innerhalb eines Intervalls $(a, a+2\pi)$ nicht geändert wird, wenn man außerhalb des Intervalls die beiden Funktionen derart modifiziert, daß man sie nach 2π periodisch fortsetzt. Die entsprechend modifizierten Integrale (14) sind aber bekanntlich bis auf den Faktor $\pi/2$ gleich den arithmetischen Mitteln der Fourierschen Reihen der gesagten periodischen Funktionen; also folgt die Richtigkeit unserer Behauptung für das Intervall $(a, a+\pi)$ und durch Verschiebung des Intervalls für alle Werte von u aus den klassischen Sätzen von Fejér und Lebesgue.

Damit ist gezeigt, daß die Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ fast überall einander gleich sind. Also gilt wegen (12) auch fast überall die Gleichung (4). Wir haben so den Satz:

Jede meßbare Funktion $p(t)$ von positivem Typus gestattet fast überall die Darstellung

$$p(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\, V(\lambda),$$

wo $V(\lambda)$ eine reelle, monoton wachsende und beschränkte Funktion ist.

Außer diesem Satze werden wir uns im Folgenden noch auf einige Zwischenergebnisse berufen, die jedoch auch aus dem fertigen Satze herausgeschält werden könnten.

Der Satz von Stone.

Der Beweis des Stoneschen Satzes gestaltet sich nun folgendermaßen.

Die Funktion

$$p(t)=(U_t f, f),$$

gebildet für irgendein Element f des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$, ist laut Voraussetzung meßbar. Da nun der Gruppeneigenschaft von U_t zufolge

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\, \varrho_\mu \bar{\varrho}_\nu = \left(\sum_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu U_{t_\mu} f,\ \sum_{\nu=1}^{m} \varrho_\nu U_{t_\nu} f \right) \geqq 0$$

ist, so ist $p(t)$ außerdem von positivem Typus und daher gilt fast überall die Darstellung

$$(15) \qquad (U_t f, f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\, V(\lambda; f),$$

wo V eine reelle, monoton wachsende und beschränkte Funktion von λ ist, deren Abhängigkeit auch vom Elemente f wir durch die Schreibweise $V(\lambda; f)$ betonen. Wir können dabei noch annehmen, V verschwinde stetig für $\lambda = -\infty$ und sei durchwegs linksstetig.

Der Wert von $V(\lambda_0; f) = V(\lambda_0 - 0; f)$ ergibt sich für jedes λ_0 als Grenzwert von

$$(16) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\lambda)\, d\, V(\lambda; f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (U_t f, f)\, h_n^*(-t)\, dt,$$

wo die $h_n(\lambda)$ irgendeine Folge von Funktionen vom Typus h sind, die für $\lambda \geqq \lambda_0$ sämtlich verschwinden und für $\lambda < \lambda_0$ mit unendlich wachsendem n wachsend überall gegen 1 konvergieren; $h_n^*(t)$ bedeutet die Fouriersche Transformierte von $h_n(t)$.

Aus dieser Darstellung von V als Grenzwert von (16) folgt in evidenter Weise, daß mit $(U_t f, f)$ zugleich auch $V(\lambda; f)$ eine Funktionale von bilinearem Typus ist, d. h. daß $V(\lambda; f + \mu g)$ für komplex veränderliches μ die in μ und $\bar{\mu}$ bilineare Darstellung

$$V(\lambda; f + \mu g) = V(\lambda; f, f) + \mu V(\lambda; g, f) + \bar{\mu} V(\lambda; f, g) + \mu\bar{\mu} V(\lambda; g, g)$$

zuläßt, wo $V(\lambda_0; f, g)$ sich analog wie $V(\lambda_0; f)$ als Grenzwert von

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (U_t f, g)\, h_n^*(-t)\, dt$$

berechnet und $V(\lambda; f, f) = V(\lambda; f)$ ist. Durch Einsetzen von $f + \mu g$ in (15) an Stelle von f und Vergleichen der Koeffizienten von $\bar{\mu}$ folgt ferner, daß fast überall

$$(18) \qquad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\, V(\lambda; f, g)$$

ist. Dabei ist der Ausdruck „fast überall" zunächst so zu verstehen, daß die eventuelle Ausnahmemenge (die, wie wir sehen werden, in Wirklichkeit nicht vorhanden ist) von der Wahl von f und g abhängt. Läßt man jedoch f und g eine abzählbare überall dichte Teilmenge des Raumes $\mathfrak{H}$ durchlaufen und vereinigt man die entsprechenden Ausnahmemengen, so zeigt man in der üblichen Weise, daß (18) außerhalb der Vereinigungsmenge, also noch immer fast überall für *alle* f, g aus $\mathfrak{H}$ gültig ist.

Schließlich folgt aus der im Laufe der vorhergehenden Untersuchungen bewiesenen Beschränktheit der dort eingeführten Operation $A(h)$ oder genauer aus der Abschätzung $A(h) \leqq p(0)$ für $0 \leqq h(t) \leqq 1$, daß auch $0 \leqq V(\lambda) \leqq p(0)$ und somit hier $0 \leqq V(\lambda; f) \leqq (f, f)$. Daraus folgt in bekannter Weise, daß auch

$$|V(\lambda; f, g)|^2 \leqq (f, f)(g, g)$$

und damit wegen der Bilinearität die Existenz einer beschränkten Transformation, die wir mit E_λ bezeichnen, derart daß für alle f, g

$$V(\lambda; f, g) = (E_\lambda f, g) \tag{19}$$

wird.

Wir haben nun zu zeigen, daß die Transformationen E_λ selbstadjungiert sind, daß sie eine Spektralschar bilden und schließlich, daß die Darstellung (1), d. i. die Gleichung (18) für *alle Werte von t* besteht.

Daß die E_λ selbstadjungiert sind, folgt unmittelbar durch Vertauschen von f und g in (17), wenn man beachtet, daß die Adjungierte von U_t gleich U_{-t} und daß $h_n^*(-t) = \overline{h_n^*}(t)$ ist, so daß also das Vertauschen von f und g gleichwertig ist dem Übergang zur konjugierten Größe, was dann auch für die Grenzwerte der Fall ist.

Für das Weitere betrachten wir die durch das Integral

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)\, d E_\lambda \tag{20}$$

erklärte Transformation K; um mit den gewohnten Mitteln auszukommen, sollen das Integral (20) und auch die übrigen mit Transformationsscharen gebildeten Integrale in der üblichen Weise durch die entsprechenden bilinearen Bildungen hindurch erklärt gedacht werden. Sind $k_1(\lambda)$ und $k_2(\lambda)$ und damit auch das Produkt $k_3(\lambda) = k_1(\lambda) k_2(\lambda)$ zunächst reelle oder komplexwertige Funktionen vom Typus h, so folgt aus der Gleichung

$$K_j = \int_{-\infty}^{\infty} k_j(\lambda)\, d E_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_j^*(-t)\, U_t\, dt \qquad (j = 1, 2, 3)$$

(vgl. (16) und (19)) durch evidentes Rechnen, daß $K_1 K_2 = K_3$. Dies besagt, daß die durch (20) erklärte Zuordnung von Transformationen K zu Funktionen k *multiplikativ* ist, einstweilen für die Funktionen vom Typus h. Diese Regel überträgt man ohne Schwierigkeit auf Funktionen $k(\lambda)$ von sehr allgemeiner Art durch Vermittlung von konvergenten Funktionenfolgen vom Typus h. Uns kommt es hier nur auf zwei ganz spezielle Fälle an, für welche der Übergang in evidenter Weise geschieht.

Der eine Fall sind die Funktionen $k(\lambda) = e^{it\lambda}$ mit reellem, sonst beliebigen t. Angewandt auf diese Funktionen, besagt die Multiplikationsregel nichts anderes, als daß die durch die Gleichung

$$(21) \qquad Q_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE_\lambda \qquad (-\infty < t < \infty)$$

definierte, evident stetige Schar von Transformationen Q_t eine *Gruppe* bildet. Andererseits ist (18) und (19) zufolge auch $U_t = Q_t$, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge von Werten t. Ist nun $U_{t_1} = Q_{t_1}$ und $U_{t_2} = Q_{t_2}$, so ist wegen der Gruppeneigenschaft der Scharen U_t und Q_t auch $U_{t_1+t_2} = Q_{t_1+t_2}$. Da schließlich jede reelle Zahl in zwei Summanden zerlegt werden kann, die einer vorgegebenen Nullmenge nicht angehören, so *ist also $U_t = Q_t$ ohne Ausnahme.*

Der zweite Spezialfall sind die Funktionen, die für $\lambda < \mu$ gleich 1, sonst gleich 0 sind. Nach (20) entsprechen ihnen die Transformationen E_μ selbst und die Multiplikationsregel besagt, daß $E_{\mu_1} E_{\mu_2} = E_{\mu_1}$ ist, sobald $\mu_1 \leq \mu_2$. Da ferner definitionsgemäß $(E_\lambda f, g) \to 0$ für $\lambda \to -\infty$ und andererseits aus (21) und aus $Q_0 = U_0 = E$ folgt, daß

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda,$$

daß also $E_\lambda \to E$ für $\lambda \to \infty$, so *befriedigt die Schar E_λ sämtliche Kennzeichen einer Spektralschar.*

Damit ist der Stonesche Satz bewiesen. Ich möchte noch hinzufügen, daß man die Ausführungen dieser Arbeit leicht so umgruppieren kann, daß man unter Ausschaltung des Bochnerschen Satzes unmittelbar die Zuordnung zwischen Funktionen $k(\lambda)$ und den entsprechenden Transformationen K zunächst für die Funktionen vom Typus h durch die Vorschrift

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k^*(-t)\, U_t\, dt$$

definiert, die Eigenschaften dieser Zuordnung, wie Distributivität, Beschränktheit, Positivität, sowie die Multiplikationsregel feststellt und schließlich durch monotone Folgen von Funktionen h hindurch zu weiteren Funktionen übergeht. Der sich so ergebende Beweis läuft ziemlich parallel jenem Beweise des Hilbertschen Satzes, den ich seinerzeit auf die Betrachtung von Transformationspolynomen gründete;[10]) die Rolle der Polynome übernimmt hier natürlich der Typus h.

(*Eingegangen am 16. Juni 1933.*)

[10]) F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris 1913, Chapitre V.; Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *diese Acta*, **5** (1930), S. 23—54.